Številske vrste

(1) D'Alembertov kriterij: $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $a_n > 0$ in
(2) Cauchyjev kriterij: $D_n = \sqrt[n]{a_n}$ $a_n \geq 0$:
a) $\exists q < 1$ da za $\forall n \geq n_0$ velja $D_n \leq q \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
b) $\forall n \geq n_0$ velja $D_n \geq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira
c) $\exists \lim_{n\to\infty} D_n = D$: D < 1 konvergira; D > 1 divergira; D = 1 ne vemo
(3) Raabejev kriterij: $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ $a_n > 0$:
a)$\forall R_n$ za $n \geq n_0$ velja $R_n \geq r > r \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira
b) $\forall R_n$ za $n \geq n_0$ velja $R_n \leq 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira
c) $\exists \lim_{n\to\infty} R_n = R$: R > 1 konvergira, R < 1 divergira, R = 1 ne vemo
(4) Leibnizov kriterij: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sign(a_{n+1})= −sign(a_n); $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira

vrsta konvergira **absolutno** $\implies$ vrsta konvergira

Funkcijska zaporedja in vrste

naj bo $f_n : I \to \mathbb{R}$ zaporedje funkcij, ki konvergirajo proti $f : I \to \mathbb{R}$
f_n konvergira proti f **po točkah**, če

$$\forall x \in I \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

f_n konvergira proti f **enakomerno**, če

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni: \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

a) zaporedje f_n konvergira enakomerno h f
$\implies$ f_n konvergira po točkah h f
b) zaporedje **zveznih funkcij** f_n konvergira enakomerno h f
$\implies$ je f zvezna
c) zaporedje **zveznih funkcij** $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergira enakomerno f
$\implies \int_a^x f_n(t)dt$ konvergira enakomerno h $\int_a^x f(t)dt$
d) zaporedje **odvedljivih funkcij** f_n konvergira po točkah h f in zaporedje odvodov konvergira enakomerno na I
$\implies$ je f odvedljiva in f_n' konvergira enakomerno h f'

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira **po točkah**, če za $\forall x \in I$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergentna. Vrsta konvergira **enakomerno**, če zaporedje delnih vsot konvergira enakomerno, oz. če za $\forall \varepsilon < 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ da za $\forall N \geq n_0$ velja:

$$\sup_{x\in I} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(x) \right| < \varepsilon$$

a) vrsta konvergira enakomerno na $I \implies$ vrsta konvergira po točkah na I in členi vrste enakomerno na I konvergirajo k 0
b) vrsta **zveznih** funkcij konvergira enakomerno na $I \implies$ vsota vrste zvezna funkcija na I in:

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$$

c) vrsta **zvezno odvedljivih** funkcij $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergira po točkah na I in $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ konvergira enakomerno na $I \implies f(x)$ odvedljiva in:

$$f'(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

Weierstrassov kriterij:
naj velja (zaporedja):

$$|f_n(x) - f(x)| \leq c_n \; \forall x \in I \;\; \& \;\; \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

potem f_n **enakomerno** konvergira k $f(x)$.
naj velja (vrste):

$$f_n(x) \leq c_n \; \forall x \in I$$

in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ naj konvergira, potem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **enakomerno** konvergira.

Potenčne vrste

(1) naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ potenčna vrsta. $\exists R \in [0,\infty)$ da je vrsta absolutno konvergentna na $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ in divergentna na $x \in (-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$. Konvergenca v točkah $x_0 \pm R$ odvisna od posamezne vrste. Vsota potenčne vrste je **zvezna** funkcija na $(-R, R)$. Velja:
a) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$, če limita $\exists$.
b) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, če limita $\exists$.
c) Cauchy-Hadamard: $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
(2) na potenčni vrsti lahko uporabimo tudi kvocienti ali korenski kriterij in ugotovimo za katere $x \in \mathbb{R}$ konvergira.
(3) naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ potenčna vrsta, ozn. z $f(x)$. Velja:
a) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergira **enakomerno** na $[x_0 - r, x_0 + r]$ za r < R.
b) f **zvezna** na $(x_0 - R, x_0 + R)$; f konvergira v $x_0 \pm R \implies f$ zvezna v $x_0 \pm R$.
c) f **odvedljiva** na $(x_0 - R, x_0 + R)$ in na tem intervalu velja:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^n$$

d) f **integrabilna** in velja:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} (\int_{x_0}^{x} a_n(t - x_0)^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

Taylorjeva vrsta

naj bo f gladka funkcija v okolici U točke x_0. Funkciji priredimo potenčno vrsto, ki ji pravimo **Taylorjeva vrsta**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

velja:
(1) za $\forall n \in \mathbb{N}$ in $\forall x \in U$ velja enakost:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_N(x)$$

(2) za ostanek velja:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_N(x)}{(x - x_0)^N} = 0, \quad R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}(x - x_0)^{N+1}$$

za nek ξ med x in x_0.
(3) če za $\forall x \in U$ velja $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, potem na U velja:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

in pravimo, da f **analitična** na U.

Uporabne vrste

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$	$x \in \mathbb{R}$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$	$x \in \mathbb{R}$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 \cdots$	$x \in (-1,1)$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$= 1 + x + x^2 + x^3 \cdots$	$x \in (-1,1)$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots$	$x \in (-1,1]$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$	$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \cdots$	$x \in [-1,1)$

Opomba: $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}$

diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami:

$$g(y)y' = f(x)$$

naj bo $G(y) = \int g(y)dy$ in $F(x) = \int f(x)dx$. Z odvajanjem lahko preverimo, da je $G(y) = F(x) + C$ splošna rešitev začetne d.e., ali pa pišemo $y' = \frac{dy}{dx}$, kar vstavimo v $g(y)y' = f(x)$ in dobimo $g(y)dy = f(x)dx$ in nato integriramo.

homogena diferencialna enačba:

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

Uvedemo novo funkcijo $v(x) = \frac{y}{x}$, od koder dobimo $y = xv \implies y' = xv' + v$, vstavimo v začetno enačbo in dobimo $xv' + v = f(v) \implies \frac{v'}{f(v)-v} = \frac{1}{x}$, tj. d.e. z ločljivimi spremenljivkami.

linearna diferencialna enačba:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

najprej rešimo homogeno $py' + qy = 0 \implies \frac{y'}{y} = -\frac{q}{p} \implies$ $\ln|y| = -\int \frac{q}{p}dx + C$ in dobimo $|y| = e^C e^{-\int \frac{q}{p}dx} \implies y = De^{-\int \frac{q}{p}dx}$, torej homogeni del ima rešitev $y_H = Dy_1$. Sedaj pa opravimo t.i. variacijo konstante, vzamemo nastavek $y_P = D(x)y_1(x)$, kar vstavimo v originalno enačbo $p(x)y' + q(x)y = r(x)$ in določimo funckijo $D(x)$.

Bernoullijeva diferencialna enačba:

$$p(x)y' + q(x)y = r(x)y^\alpha$$

kjer $\alpha \in \mathbb{R}$. Če $\alpha = 0$, enačba linearna, če $\alpha = 1$ enačba z ločljivimi spremenljivkami, drugače delimo z y^α in dobimo $p(x)y'y^{-\alpha} + q(x)y^{1-\alpha} = r(x)$. Uvedemo $z = y^{1-\alpha} \implies z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$ in vstavimo v zgornjo enačbo $\frac{pz'}{1-\alpha} + qz = r$, kar je linearna d.e.

eksaktna diferencialna enačba:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

pišimo $y' = \frac{dy}{dx}$, dobimo $P + Qy' = 0$. Naj bo y rešitev enačbe, potem je $(1, y')$ tangenten na graf funkcije, in velja $(P,Q) \cdot (1, y') = 0$, torej so rešitve krivulje, pravokotne na vektorsko polje (P,Q). Opazimo, če je $u(x,y)$ taka, da je grad(u) enak (P,Q), potem je rešitev enačbe $u(x,y) = C$:
1) denimo $P_y = Q_x$, potem $\exists u$, da je grad(u) = (P,Q).
2) denimo $P_y \neq Q_x$. Potem $\exists$ t.i. integrirajoči množitelj μ, da je $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$.

Tabela odvodov

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x\ln(a)$	e^x	e^x
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{xlna}$
$\csc x$	$-\cot(x)\csc(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sec x$	$\tan(x)\sec(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Znane limite

$\lim_{x\to\infty} a^x = 0\ ,\ |a|<1$ $\quad \lim_{x\to 0} x^x = 1$ $\quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a\ ,\ a>0$ $\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{mk}$ $\quad \lim_{x\to 0} \left(1+kx\right)^{\frac{m}{x}} = e^{mk}$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

nedoločene oblike
$\frac{0}{0}(L.H.), \frac{\infty}{\infty}(L.H.), 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$
prevladujoči členi
$n^n \gg n! \gg q^n\ (|q|>1) \gg n^a\ (a>0) \gg ln(n)^a\ (a>0)$

Tabela integralov

$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$	$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}(n\neq -1)$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$	a^x	$\frac{a^x}{ln(a)}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\sec x\tan x$	$\sec x$	$\csc x cot x$	$-\csc x$	$\tan x$	$\ln\lvert\sec x\rvert$

per partes $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$
racionalne funkcije $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$
če je $st(q(x)) <= st(p(x))$: (1) polinoma delimo, (2) $q(x)$ razdelimo na linearne in kvadratne faktorje, (3) izraz pod integralom razcepimo na parcialne ulomke, (4) integriramo vsakega zase
kotne funkcije $\int \cos^m x \sin^n x dx$
če je eno od števil m,n **liho**, uporabimo tisti člen za t substitucijo
če sta obe **sodi**, jih nadomestimo z identiteto polovičnih kotov
Enačba tangente in normale
Tangenta: $Y - y = y'(X-x)$ **Normala:** $Y - y = -\frac{1}{y'}(X-x)$
Nekaj pomembnih vrst

$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$

$\sum_{k=m}^n q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$ $\quad \sum_{k=1}^\infty q^k = \frac{q}{1-q},\ |q|<1$

$\sum_{k=m}^n q^k = \frac{q^m - q^{n+1}}{1-q}$ $\quad \sum_{k=1}^\infty q^k = \frac{q}{1-q},\ |q|<1$

$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\quad \sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q},\ |q|<1$

$\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$ $\quad \sum_{k=0}^\infty k\frac{z^k}{k!} = ze^z$ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Izrazi

$(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + \cdots + b^{n-1})$
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$1 + a^{2n+1} = (1+a)(1-a+\cdots - a^{2n-1} + a^{2n})$

Potence, koreni, logaritmi

$a^n a^m = a^{n+m}$ $\quad a^n b^n = (ab)^n$ $\quad (a^n)^m = a^{nm}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad ab^{-n} = \frac{a}{b^n}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$ $\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
$(-a)^{2n} = a^{2n}$ $\quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ $\quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$
$\log_a x^n = nlog_a x$ $\quad log_b x = \frac{\log_a x}{log_a b}$ $\quad \log_a y = x \iff a^x = y$
$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Kompleksna števila

$\alpha = a + bi$ $\quad \bar{\alpha} = a - bi$ $\quad \alpha\beta = (ac-bd) + (ad+bc)i$
$a = \frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}$ $\quad b = \frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2i}$ $\quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}$ $\quad \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$
$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad arg(\alpha) = atan2(a,b)$
$\alpha^n = |\alpha|^n e^{in\varphi}$ $\quad \alpha\beta = |\alpha|\,|\beta|\, e^{i(\varphi_{(\alpha)}+\varphi_{(\beta)})}$
$\alpha^n = |\alpha|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$ $\quad \alpha^n = |\alpha|^n e^{i(n\varphi)}$
$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)\right)$
$\sqrt[n]{\alpha} = \sqrt[n]{|\alpha|}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)}$ $\quad k=0,1,2,\ldots,n-1$

Kvadratna funkcija

$f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
$f(x) = a(x-p)^2 + q$ $\quad x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
teme T(p,q): $\quad p = -\frac{b}{2a}$ $\quad q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$

Stožnice

parabola $\quad (y-q)^2 = \pm 2a(x-p)$ $\quad d(T,\prod) = \frac{|ax+by+cz-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
krožnica $\quad (y-q)^2 = \pm 2a(x-p)$ $\quad \vec{p}\cdot\vec{q} = |\vec{p}|\,|\vec{q}|\cos\vartheta$
elipsa $\quad \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$
hiperbola $\quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = \pm 1$

Obsegi, površine, volumni

tip	obseg	površina	tip	površina	volumen
krog	$2\pi r$	πr^2	krogla	$4\pi r^2$	$\frac{4\pi r^3}{3}$
enak.trik.	$3a$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	tetraeder	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
trapez	$a+b+c+d$	$\frac{a+c}{2}h$	valj	$2\pi r(r+h)$	$\pi r^2 h$
deltoid	$2a+2b$	$ab\sin\alpha$	stožec	$2\pi r(r+s)$	$\frac{\pi r^2 h}{3}$

**h = height, s = slant*

Kotne funkcije

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	Q1	Q2	Q3	Q4	S/L
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	+	+	-	-	L
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	+	-	-	+	S
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	+	-	+	-	L
$\cot\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	+	-	+	-	L

$\sin\alpha = \frac{N}{H}$ $\quad \cos\alpha = \frac{P}{H}$ $\quad tan\alpha = \frac{N}{P}$ $\quad \cot\alpha = \frac{P}{N}$
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ $\quad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$
$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$ $\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$
$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)}$ $\quad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$
$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}$ $\quad \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ $\quad 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 2\sin\alpha$
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$
$\cos(\alpha\mp\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$
$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$
$\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha\pm\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$
$\sin\alpha - \cos\beta = -2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$

Hiperbolične funkcije

$\sinh x$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{1-e^{-2x}}{2e^{-x}}$	
$\cosh x$	$\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{1+e^{-2x}}{2e^{-x}}$	
$\sinh^{-1} x$	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$	
$\cosh^{-1} x$	$\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$x\geq 1$
$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$	$\lvert x\rvert<1$
$\coth^{-1} x$	$\frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$	$\lvert x\rvert>1$
$\cosh x + \sinh x = e^x$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$	
$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$		

**ident. kotnih funkcij, vendar se pri sinh(x) * sinh(y) obrne predznak*

Krožne funkcije

$\sin^{-1} x$	$D_f = [-1,1]$	$Z_f = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$\cos^{-1} x$	$D_f = [-1,1]$	$Z_f = [0,\pi]$
$\tan^{-1} x$	$D_f = (-\infty,\infty)$	$Z_f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
$\cot^{-1} x$	$D_f = (-\infty,\infty)$	$Z_f = (0,\pi)$
$\sec^{-1} x$	$D_f = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$Z_f = [0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$
$\csc^{-1} x$	$D_f = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	$Z_f = [-\frac{\pi}{2},0)\cup(0,\frac{\pi}{2}]$