Največja stopnja ΔG, najmanjša δG.
Rokovanje: $\sum_{v\in VG}\deg_G v = 2|EG|$.
Vsak graf ima sodo mnogo vozlišč lihe stopnje.
Presek/unija grafov je presek/unija njunih V in E.
$G\cup H$ je disjunktna unija grafov $\sim VG\cap VH=\emptyset$.
Komplement grafa: $\overline{G}$ (obratna povezanost)
$0\leq|EG|\leq\binom{|VG|}{2}$ Za padajoče d_i velja:
$(d_1,\dots d_n)$ graf $\Leftrightarrow (d_2-1,\dots,d_{d_1+1}-1,\dots,d_n)$ graf
Če je AG matrika sosednosti, $\left((AG)^n\right)_{i,j}$ pove št. $i,j-$poti.

$$\text{Število trikotnikov: } \frac{\operatorname{sled}\left((AG)^3\right)}{2\cdot 3}$$

$|EK_n|=\binom{n}{2}$, $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Sprehod je zaporedje vozlišč, ki so verižno povezana.
Dolžina sprehoda je število prehojenih povezav.
Sklenjen sprehod dolžine k: $v_0=v_k$
Enostaven sprehod ima disjunktna vozlišča razen (v_0,v_k).
Pot v grafu: podgraf $P_k\sim$ enostaven nesklenjen sprehod.

Cikel podgraf, ki je enostaven sklenjen sprehod dolžine >3.
Če v G $\exists$ dve različni $u,v-$poti $\Leftrightarrow G$ premore cikel
Sklenjen sprehod lihe dolžine $\in G\Leftrightarrow$ lih cikel $\in G$

Povezanost u,v sta v isti komponenti $\sim\exists\, u,v-$pot
Število komponent grafa: ΩG. G povezan $\sim\Omega G=1$
Komponenta je maksimalen povezan podgraf.
Premer: $\operatorname{diam}G=\max\{d_G(v,u);\forall v,u\in VG\}$
Ekscentričnost: $\operatorname{ecc}_G u = max\{d_G(u,x);\forall x\in VG\}$
Polmer: $\operatorname{rad}G=\min\{\operatorname{ecc}u;\forall u\in VG\}$
$\operatorname{diam}C_n=\operatorname{rad}C_n=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$
(Liha) ožina ($\operatorname{g}G$) je dolžina najkrajšega (lihega) cikla.
Vsaj en od G in $\overline{G}$ je povezan.
Povezava e je most $\Leftrightarrow\Omega(G-e)>\Omega G$
u je prerezno vozlišče $\Leftrightarrow\Omega(G-u)>\Omega G$
Za nepovezan G velja $\operatorname{diam}\overline{G}\leq 2$

Dvodelni $\sim V=A\cup B, A\cap B=\emptyset,\forall uv\in E: u\in A\oplus v\in A$
$K_{m,n}$ je poln dvodelni graf, $|A|=m$, $|B|=n$
G dvodelen $\Leftrightarrow\forall$ komponenta G dvodelna
Pot, sod cikel, hiperkocka so dvodelni, petersenov ni.
G dvodelen $\Leftrightarrow G$ ne vsebuje lihega cikla.
Biparticija glede na parnost $d_G(u,x_0)$, x_0 fiksen.
Dvodelen $k-$regularen, $|E|\geq 1\Rightarrow|A|=|B|$. Dokaz: $\sum_{u\in A}\deg u=|E|=\cancel{k}|A|=\cancel{k}|B|=\sum_{u\in B}\deg u$

Krožni $\operatorname{Cir}(n,\{s_1,\dots,s_k\}):|V|=n$, množica preskokov
$\Omega\operatorname{Cir}(n,\{s,n-s\})=\gcd\{n,s\}$
W_n (kolo) pa je cikel z univerzalnim vozliščem.

Homomorfizem $\varphi:VG\to VH$ slika povezave v povezave
Primer: K_2 je homomorfna slika $\forall$ bipartitnega grafa.
V povezavah in vozliščih surjektiven $hm\varphi$ je epimorfizem.
V vozliščih injektiven $hm\varphi$ je monomorfizem/vložitev.
Vložitev, ki ohranja razdalje, je izometrična.
Kompozitum homomorfizmov je spet homomorfizem.
Izomorfizem je bijektivni $hm\varphi$ s homomorfnim inverzom.

$im\varphi\ f:VG\to VH\ \forall u,v\in VG: uv\in EG\Leftrightarrow fufv\in EH$
Nad množico vseh grafov $\mathcal{G}$ je izomorfizem ($\cong$) ekv. rel.
$im\varphi\ G\to G$ je avtomorfizem.
$\operatorname{Aut}G$ je grupa avtomorfizmov s komponiranjem.
$\operatorname{Aut}K_n=\{\pi\in S_n=\text{permutacije } n \text{ elementov}\}$
$\operatorname{Aut}P_n=\{\text{trivialni } id, f(i)=n-i-1\}$, $\operatorname{Aut}G\cong\operatorname{Aut}\overline{G}$
Izomorfizem ohranja stopnje, št. C_4, povezanost, $|EG|,\dots$
$G\cong\overline{G}\Rightarrow|VG|\%4\in\{0,1\}$

Operacije H vpeti podgraf $G\Leftrightarrow\exists F\subseteq EG\ni: H=G-F$
H inducirani podgraf $G\Leftrightarrow\exists S\subseteq VG\ni: H=G-S$
H podgraf $G\Leftrightarrow\exists S\subseteq VG, F\subseteq EG\ni: H=(G-F)-S$
$uv=e\in EG$. G/e je skrčitev. (identificiramo $u=v$)
H minor G: $H=f_1...f_kG$ za f_i skrčitev/odstranjevanje
$VG^+e\coloneqq VG\cup\{x_e\}$, $EG^+e\coloneqq EG\setminus e\cup\{x_eu,x_ev\}$
VG^+e je subdivizija, $e\in EG$. Na e dodamo vozlišče.
H subdivizija $G\Leftrightarrow H=G^+\{e_1,\dots,e_k\}^+\{f_1\dots f_j\}^+\dots$
Stopnja vozlišč se s subdivizijo ne poveča.
Glajenje G^-v, $v\in VG$ je obrat subdivizije. $\deg_G v=2$
G in H sta homeomorfna, če sta subdivizija istega grafa.
Kartezični produkt: $V(G\Box H)\coloneqq VG\times VH$, $E(G\Box H)\coloneqq\{\{(g,h),(g',h')\};g=g'\wedge hh'\in EH\vee h=h'\wedge gg'\in EG\}$
$(\mathcal{G},\Box)$ monoid, enota K_1. $Q_n\cong Q_{n-1}\Box K_2=Q_{n-2}\Box K_2^{\Box,2}$
Disjunktna unija: G, H disjunktna. $V(G\cup H)\coloneqq VG\cup VH$, $E(G\cup H)\coloneqq EG\cup EH$
G,H dvodelna $\Rightarrow G\Box H$ dvodelen

$k-$**povezan graf** ima $\geq k+1$ vozlišč in ne vsebuje prerezne množice moči $<k$
$X\subseteq VG$ je prerezna množica $\Leftrightarrow\Omega(G-X)>\Omega G$
$Y\subseteq EG$ prerezna množica povezav $\Leftrightarrow\Omega(G-Y)>\Omega G$
Povezanost grafa: $\kappa G=\max k$, da je G $k-$povezan. Primeri: $\kappa K_n=n-1$, $\kappa P_n=1$, $\kappa C_n=2$, $\kappa K_{n,m}=\min\{n,m\}$, $\kappa Q_n=n$, $\kappa G\leq\delta G$
Izrek (Menger): $|VG|\geq k+1$: G $k-$povezan $\Leftrightarrow\forall u,v\in VG, uv\notin EG:\exists k$ notranje disjunktnih $u,v-$poti
Graf je $k-$povezan po povezavah, če ne vsebuje prerezne množice povezav moči $<k$. Povezanost grafa po povezavah: $\kappa' G=\max k$, da je G $k-$povezan po povezavah. Primeri: $\kappa' K_n=n-1$, $\kappa' P_n=1$, $\kappa' C_n=2$
Izrek (Menger'): G $k-$povezan $\Leftrightarrow\forall u,v\in VG\exists k$ po povezavah disjunktnih $u,v-$poti
$\forall G\in\mathcal{G}:\kappa G\leq\kappa' G\leq\delta G$

Drevo je povezan gozd. Gozd je graf brez ciklov.
Drevo z vsaj dvema vozliščema premore dva lista. NTSE:
G drevo $\Leftrightarrow\forall u,v\in VG\exists! u,v-$pot $\Leftrightarrow\Omega G=1\wedge\forall e\in EG: e$ most $\Leftrightarrow\Omega G=1\wedge|EG|=|VG|-1$
Vpeto drevo grafa je vpet podgraf, ki je drevo.
$\tau G\sim$ število vpetih dreves. $\Omega G=1\Leftrightarrow\tau G\geq 1$
$\forall e\in EG:\tau G=\tau(G-e)+\tau(G/e)$

$$\text{Laplaceova matrika: } L(G)_{ij}=\begin{cases}\deg_G v_i & ;i=j\\ -(\text{št. uv povezav}) & ;\text{drugače}\end{cases}$$

Izrek (Kirchoff): za G povezan multigraf je $\forall i:\tau G=\det(LG$ brez $i$te vrstice in $i$tega stolpca). $\tau K_n=n^{n-2}$

Prüferjeva koda, če lahko linearno uredimo vozlišča: Ponavljaj, dokler $VG\neq\emptyset$: vzemi prvi list, ga odstrani in v vektor dodaj njegovega soseda.

Blok je maksimalen povezan podgraf brez prereznih vozlišč.

$\tau G=\tau B_1\cdot\dots\cdot\tau B_k$ za bloke $\vec{B}$ grafa G.

Eulerjev sprehod v m.grafu vsebuje vse povezave po enkrat.
Eulerjev obhod je sklenjen eulerjev sprehod.
Eulerjev graf premore eulerjev obhod.
Za povezan multigraf G eulerjev $\Leftrightarrow\forall v\in VG:\deg_G v$ sod
Fleuryjev algoritem za eulerjev obhod v eulerjevem grafu: Začnemo v poljubni povezavi, jo izbrišemo, nadaljujemo na mostu le, če nimamo druge možne povezave.
Dekompozicija: delitev na povezavno disjunktne podgrafe.
Dekompozicija je lepa, če so podgrafi izomorfni. ($\exists$ za $P_{5,2}$)
Vsak eulerjev graf premore dekompozicijo v cikle.
Q_n eulerjev $\Leftrightarrow n$ sod
$K_{m,n,p}$ eulerjev $\Leftrightarrow m,n,p$ iste parnosti
G eulerjev $\wedge H$ eulerjev $\Rightarrow G\Box H$ eulerjev

Hamiltonov cikel vsebuje vsa vozlišča grafa.
Hamilton graf premore Hamiltonov cikel.
Hamiltonova pot vsebuje vsa vozlišča.
G hamiltonov, $S\subseteq VG\Rightarrow\Omega(G-S)\leq|S|$ torej:
$\exists S\in VG:\Omega(G-S)>|S|\Rightarrow G$ ni hamiltonov. Primer: G vsebuje prerezno vozlišče $\Rightarrow G$ ni hamiltonov.
$K_{n,m}$ je hamiltonov $\Leftrightarrow m=n$ (za S vzamemo $\min\{m,n\}$)
$|VG|\geq 3,\forall u,v\in VG:\deg_G u+\deg_G v\geq|VG|\Rightarrow G$ hamil.
Dirac: $|VG|\geq 3,\forall u\in VG:\deg_G u\geq\frac{|VG|}{2}\Rightarrow G$ hamilton.

Ravninski graf brez sekanja povezav narišemo v ravnino
$K_{2,3}$ je ravninski, $K_{3,3}$, K_5, $C_5\Box C_5$ in $P_{5,2}$ niso ravninski.
Vložitev je ravninski graf z ustrezno risbo v ravnini.
Lica so sklenjena območja vložitve brez vozlišč in povezav.
G lahko vložimo v ravnino $\Leftrightarrow G$ lahko vložimo na sfero.
Dolžina lica $F\sim lF$ je št. povezav obhoda lica.
Drevo je ravninski graf z enim licem dolžine $2|ET|$
$\sum_{F\in FG}lF=2|EG|$, $lF\geq gG$ za ravninski G
$2|EG|=\sum_{F\in FG}lF\geq\sum_{F\in FG}gG=gG|FG|$ (G ravn.)
G ravninski $\Rightarrow|EG|\geq\frac{gG}{2}|FG|$
Euler: $|VG|-|EG|+|FG|=1+\Omega G$ za ravninski G
G ravninski, $|VG|\geq 3\Rightarrow|EG|\leq 3|VG|-6$
G ravninski brez C_3, $|VG|\geq 3\Rightarrow|EG|\leq 2|VG|-4$
Triangulacija je taka vložitev, da so vsa lica omejena s C_3.
V maksimalen ravninski graf ne moremo dodati povezave, da bi ostal ravninski. $\sim$ Ni pravi vpet podgraf ravn. grafa.
K_5-e je maksimalen ravninski graf $\forall e\in EK_5$
G ravninski. NTSE: G triangulacija $\Leftrightarrow G$ maksimalen ravninski $\Leftrightarrow|EG|=3|VG|-6$
G ravninski $\Leftrightarrow$ vsaka subdivizija G ravninska.
Kuratovski: G ravn. $\Leftrightarrow$ ne vsebuje subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$
Wagner: G ravn. $\Leftrightarrow$ niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja
Zunanje-ravninski ima vsa vozlišča na robu zunanjega lica.
$2-$povezan zunanje-ravninski je **hamiltonov**.
Zunanje-ravninski G, $|VG|\geq 2$ ima vozlišče stopnje ≤ 2.

Barvanje vozlišč je taka $C:VG\to\{1..k\}\Leftrightarrow\forall uv\in EG: Cu\neq Cv$
Kromatično število χG je najmanjši k, $\ni$: $\exists\ k-$barvanje G
$\chi C_n=\begin{cases}2 & ;n \text{ sod}\\ 3 & ;n \text{ lih}\end{cases}$, $\chi G\leq|VG|,\chi G=|VG|\Leftrightarrow G\cong K_n$
H podgraf $G\Rightarrow\chi G\geq\chi H$. χbipartitni $=2$
Barvni razred so vsa vozlišča iste barve. Je brez povezav $\sim$ **neodvisna množica**.
$\chi G=k\Leftrightarrow\chi G\leq k\wedge\chi G\geq k$
Klično št.: $\omega G\coloneqq|V|$ najv. polnega podgr. v G. $\omega G\leq\chi G$.
Trditev: $\forall n\in\mathbb{N}\exists G\in\mathcal{G}\ni:\omega G=2\wedge\chi G=n$
Požrešno barvanje: Vozlišča v poljubnem vrstnem redu barvamo z najnižno možno barvo.
Vedno $\exists$ vrstni red, ki vrne barvanje s χG barvami.
$\forall G\in\mathcal{G}:\chi G\leq\Delta G+1$, če G ni regularen celo $\chi G\leq\Delta G$
Brooks: G povezan, G ni poln niti lihi cikel $\Rightarrow\chi G\leq\Delta G$
let $d_1\geq\dots\geq d_n$ stopnje. $\chi G=1+\max_{i=1}^n\min\{d_i,i-1\}$
Spoj $G\oplus H$ je disjunktna unija G,H z vsemi pov. med njima
Disjunktna unija je unija brez preseka.
$\chi(G\oplus H)=\chi G+\chi H$
Ravninski graf ima $\chi G\leq 4$

Barvanje povezav Povezavi s skupnim vozl. $\Rightarrow$ razl. barvi.
Kromatični indeks $\chi' G$ je najm. št. barv za barv. pov. G.
$\chi' C_n=\begin{cases}2 & ;n \text{ sod}\\ 3 & ;n \text{ lih}\end{cases}$
Vizing: $\forall G\in\mathcal{G}:\Delta G\geq\chi' G\geq\Delta G+1$
$\chi G\in\{\Delta G \text{ razred I.},\Delta G+1 \text{ razred II.}\}$
$K_{2k+1}\in$ II., $K_{2k}\in$ I., bipartitni $\in$ I.

Neodvisne množice $I\subseteq VG$ je neodvisna, če je podgraf, induciran z I, brez povezav.
Neodvisnostno št αG je moč največje neodvisne množice.
$\alpha K_n=1$, $\alpha C_n=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$
$\alpha G\leq\sum_{i=1}^k\alpha H_i$, kjer so H_i disjunktni inducirani podgr. G.
$\forall G\in\mathcal{G}:\alpha G\cdot\chi G\geq|VG|$
$\frac{|VG|}{\chi G}\leq\alpha G\leq|VG|-\frac{|EG|}{\Delta G}$ — zgornja in spodnja meja.
Iu je α poddrevesa s korenom u v T
$\alpha T=Ir=\max\{1+\sum_{u \text{ sinovi } r}Iu,\sum_{u \text{ vnuki } r}Iu\}$

Dominantne množice Neodvisna $I\subseteq G$ je maksimalna $\sim\nexists S$ neodvisna $\subseteq G\ni: I\subset S\sim$ ni prava $\subset$ neodv. mn.
Dominantna množica je maksimalna neodvisna, kjer ima vsako vozlišče iz $G\setminus I$ soseda v I.
$D\subseteq VG$ dominira $X\subseteq VG$, če je vsako vozlišče iz X v D ali pa ima soseda v D.
$N_G(u)=$sosedje u v G, $N_G[u]=N_G(u)\cup\{u\}$ zap. sos. u
$N_G[D]=\bigcup_{u\in D}N_G[u]$ zaprta soseščina množice D
D dominira $X\sim X\subseteq N_G[D]$.
D dominira $VG\sim D$ dominantna množica G.
Dominacijsko število $\gamma G=$ moč največje dom. mn.
Vsaka maksimalna neodvisna mn. G je dom. mn. G
$\gamma K_n=1$, $\gamma C_n=\lceil\frac{n}{3}\rceil$, $\gamma P=3$

Za vsak graf brez izoliranih vozlišč $\lceil \frac{|VG|}{\Delta G+1} \rceil \leq \gamma G \leq \lfloor \frac{|VG|}{2} \rfloor$

X je 2-pakiranje G, če $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow d_G(x, y) \geq 3$ zdb $\forall x, y \in X : x \neq y \Rightarrow N_G x \cap N_G y = \emptyset$

Moč največjega 2-pakiranja je 2-pakirno število ρG.

G povezan $\Rightarrow \gamma G \geq \rho G$

Dominantna X je popolna koda $G \Leftrightarrow \bigcup_{u \in X} N_G[u] = VG$

Če graf premore popolno kodo $\Rightarrow \gamma G = \rho G$

H vpet podgraf $G \Rightarrow \gamma G \leq \gamma H$

Povezan G premore vpeto drevo $T \ni: \gamma G = \gamma T$. Dokaz: odstrani vse povezave, kjer $G - e$ ohrani γ in povezanost.

$|VG| \geq 1 \Rightarrow \gamma G \leq \chi \overline{G}$

Povezana dom. mn. inducira povez. podgraf. — γ_c

Neodvisna dom. mn. inducira podgraf brez povezav — γ_i

X je celotna dom. mn. $\Leftrightarrow \forall v \in VG : N_G(v) \cap X \neq \emptyset$ — γ_t

G brez izol. vozl.: $\gamma G \leq \gamma_t G \leq 2\gamma G$

Algebrske strukture z eno operacijo Grupoid: notranjost, polgrupa: asociativen grupoid, monoid: polgrupa z enoto

Grupa: $\forall a \in A \exists a^{-1} \in A \ni: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

Potence v monoidu: $n \in \mathbb{N}_0$. $a^0 = e$, $a^n = a \cdot a^{n-1}$

$(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$

$\left(a^{-1}\right)^n = (a^n)^{-1}$

$(\mathbb{Z}_m, +_m)$ grupa, $(\mathbb{Z}_m, \cdot_n)$ monoid

$k \in \mathbb{Z}_n$ obrnljiv v $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n) \Leftrightarrow k \perp n \sim \gcd\{k, n\} = 1$

Komutativni grupi pravimo abelova.

Cayleyeva tabela je predpis za grupoid $\cdot : A^2 \to A$.

red a je najmanjši $n \in \mathbb{N} \ni: a^n = e$ oz. ∞, če ne obstaja.

Def.: $H \subseteq G$ podgrupa, če je grupa za isto operacijo.

Izrek: $H \subseteq G$ podgrupa $\Leftrightarrow \forall x, y \in H : x^{-1}y \in H$

Trivialni podgrupi G sta $\{e\}$ in G. Ciklična podgrupa: $\langle a \rangle \coloneqq \{a^n; \forall n \in \mathbb{Z}\}$ je podgrupa v G za $a \in$ grupa G

Center grupe: $ZG = \{a \in G; \forall x \in G : ax = xa\}$.

$(ZG, \cdot)$je podgrupa grupe $(G, \cdot)$.

Permutacijske grupe Permutacija je bijekcija $A \to A$.

perm. gr. so permutacije A, ki tvorijo grupo za $\circ$.

Polna simetrična grupa $S_n \coloneqq \{\pi : \{1..n\} \to \{1..n\}; \pi \text{ bijekcija}\}$

Alternirajoča grupa $A_n \coloneqq \{\pi \in S_n; \pi \text{ soda}\}$

Permutacija kot produkt disjunktnih ciklov dolžin $l_1, \ldots, l_n$ je soda, če je $(l_1 - 1) + \cdots + (l_n - 1)$ sod.

$|S_n| = n!$, $|A_n| = \frac{n!}{2}$

$(G, \circ)$,$(H, *)$ grupi. $f : G \to H$ je hm$\varphi \Leftrightarrow \forall x, y \in G : f(x \circ y) = fx * fy$. f je še celo im$\varphi \Leftrightarrow f$ bijekcija.

Grupi sta izomorfni $\sim \exists$imφ med njima: $G \approx H$

Vsaka grupa je izomorfna neki permutacijski grupi

Odseki in podgrupe edinke $(G, \circ)$ grupa, $H \subseteq G$. za $a \in G$: $aH = \{ah; h \in H\}, Ha = \{ha; h \in H\}$. Za H podgrupo pravimo aH levi odsek H in Ha desni. Velja: $a \in aH$, $aH = H \Leftrightarrow a \in H$, $aH = bH \nabla aH \cap bH = \emptyset$, $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$, $|aH| = |bH|$, $aH = Ha \Leftrightarrow H = aHa^{-1}$, $aH \subseteq G \Leftrightarrow a \in H$

general linear $GL_2\mathbb{R} = \{A \in M_{2,2}\mathbb{R}, \det A \neq 0\}$

special linear $SL_2\mathbb{R} = \{A \in M_{2,2}\mathbb{R}, \det A = 1\}$

Lagrange: H podgrupa končne grupe $G \Rightarrow |H|$ deli $|G|$ in število različnih levih/desnih odeskov po H je $\frac{|G|}{|H|}$.

$a \in$ končne grupe $G \Rightarrow$ red a deli $|G|$

Podgrupe edinke in faktorske grupe H podgrupa G je edinka $\Leftrightarrow \forall a \in G : aH = Ha \sim aHa^{-1} = H$

Podgrupa konjugiranka $H^a \coloneqq aHa^{-1}$.

$H \triangleleft G \sim H$ edinka v $G \Leftrightarrow \forall a \in G : H^A = H$

V Abelovi grupi je vsaka podgrupa edinka.

Center je podgrupa edinka.

$G/H \coloneqq \{aH : a \in G\}$ z oper. $(aH) * (bH) = (ab)H$

Izrek o faktorskih grupah: $H \triangleleft G \Rightarrow (G/H, *)$ grupa

Kolobarji in polja $(R, +, \cdot)$ kolobar $\Rightarrow (R, +)$ abelova grupa, $(R, \cdot)$ polgrupa, distributivnost.

Kolobar je komutativen, če je $\cdot$ komutativna.

Kolobar je z enoto, če obstaja enota za $\cdot$.

Direktna vsota kolobarjev $(R \oplus S, +, \cdot)$ je kolobar. $R \oplus S = R \times S$, $+$ in $\cdot$ po komponentah.

R in S komutativna $\Rightarrow R \oplus S$ komutativen.

R in S z enoto $\Rightarrow R \oplus S$ z enoto.

R kolobar. $S \subseteq R$ je za podedovani operaciji kolobar, če je $(S, +, \cdot)$ kolobar. Izrek: S podkolobar $\Leftrightarrow 0 \in S$ in zaprta za $-, \cdot$

Center kolobarja: $ZR = \{a \in R; \forall x \in R : ax = xa\}$ je podk.

Delitelji niča in celi kolobarji $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ je vedno kol.

Def.: Če v kolobarju velja $ab = 0$ in $a \neq 0$ in $b \neq 0$, sta a in b delitelja niča.

Pravilo krajšanja: $\forall a, b, c \in R, a \neq 0 : ab = ac \Rightarrow b = c$

R cel $\Leftrightarrow$ komutativen z enoto $1 \neq 0$ brez deliteljev niča.

Za komutativen z enoto $1 \neq 0$ velja: cel $\Leftrightarrow$ velja prav. krajš.

$(R, +, \cdot)$ z enoto $1 \neq 0$ je polje, če je $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ abelova g.

$(R, +, \cdot)$ z enoto $1 \neq 0$ je obseg, če je $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ grupa.

Vsako polje je cel kolobar.

Polje je cel kolobar z multiplik. inverzi za vse neničelne.

Končen cel kolobar $\Rightarrow$ polje.

$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : \mathbb{Z}_n$ cel $\Leftrightarrow \mathbb{Z}_n$ polje $\Leftrightarrow n$ praštevilo

$S \subseteq$ polje R je podpolje za poded. operaciji, če je S polje. Zadošča preveriti $1 \in S$, zaprtost za $-$ in deljenje z nenič.ž

$n \cdot' a$ naj pomeni $a + \cdots + a$ n-krat za $n \in \mathbb{N}$

Karakteristika kolobarja je najmanjši $n \in N \ni: \forall a \in R : n \cdot' a = 0$. Če ne obstaja, pravimo char$R = 0$.

Izrek: Če je red1$= n \Rightarrow$ char$R = n$

Izrek: Za cel kolobar R je char$R = 0$ ali char$R =$ praštevilo

Ideali S podkolobar R je ideal $R \Leftrightarrow \forall r \in R, s \in S : rs, sr \in S$

Primer: večkratniki n so za fiksen n ideal v $\mathbb{Z}$.

$I \subseteq R$ je ideal $\Leftrightarrow 0 \in I$, zaprt za $-$, zaprt za zunanje množ.

Operaciji nad ideali: $I \overset{+}{\cdot} J = \left\{i \overset{+}{\cdot} j; \forall i \in I, j \in J\right\}$

Za ideala I, J v R sta $I + J$ in $I \cdot J$ zopet ideala v R.

V aditivne odseke $R/I = \{a + I; \forall a \in R\}$ vpeljemo operaciji $(a + I) \overset{+}{\cdot} (b + I) = \left(a \overset{+}{\cdot} b\right) I$. Če je I ideal v R, je R/I za operaciji kolobar.