Odgovori na ustna vprašanja višje ravni na ustni maturi 2023

ANTON LUKA ŠIJANEC

15. junij 2023

Kazalo

1 Vprašanja in odgovori **1**
1.1 Izjavni račun 1
1.2 Izjavni račun 2
1.3 Množice 3
1.4 Množice 4
1.5 Naravna in cela števila 5
1.6 Liha in soda števila 5
1.7 Praštevila 5
1.8 Deljivost 6
1.9 Večkratniki in delitelji 7
2 Viri, literatura in dodatno branje **7**
3 Zaključek **8**

1 Vprašanja in odgovori

1.1 Izjavni račun

Kaj je izjava? **(1 točka)**

> Popoln (z vsemi nujnimi stavčnimi členi in slovnično pravilen) trdilni ali nikalni stavek je **smiseln**, če se v okviru predmetov in pojmov, o katerih stavek govori (v njegovem **kontekstu**), vsaj načelno lahko lahko odločimo, ali je njegova vsebina **resnična** ali **lažna**. Vsi smiselni stavki, ki trdijo isto, določajo **izjavo**.[1]

Kaj je negacija dane izjave? Kdaj je negacija pravilna (resnična) in kdaj nepravilna (neresnična)? **(1 točka)**

Negacija $\neg A$ (ali: $\overline{A}$) izjave A je izjava, ki je resnična natanko tedaj, ko je A lažna (Tabela 1).[1]

A	$\neg A$
1	0
0	1

Tabela 1: Negacija.

Kaj je konjunkcija izjav? **(1 točka)**

Če izjavi A in B povežemo z veznikom „in“, dobimo **konjunkcijo** $A \wedge B$ (ali tudi $A\&B$). Konjunkcija je resnična le tedaj, kadar sta oba člena resnični izjavi (Tabela 2).[1]

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0

Tabela 2: Osnovne logične povezave.

Kaj je disjunkcija izjav? Dokažite, da je izjava $\neg(A \wedge B)$ enakovredna izjavi $\neg(A) \vee \neg(B)$ za poljubni izjavi A in B. **(3 točke)**

De Morganovi[1] pravili $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$ in $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$ najlažje dokažemo z logično tabelo (Tabela 3).

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Tabela 3: Logična tabela za dokaz De Morganovih pravil.

1.2 Izjavni račun

Kaj je tavtologija? **(1 točka)**

Izjavi, ki je vedno resnična ne glede na naravo delnih izjav, rečemo **istorečje** ali **tavtologija**; da je izjava A tavtologija, zapišemo takole: $\vDash A$.[1]

Kaj je implikacija? Dokažite, da je izjava $A \Rightarrow B$ enakovredna izjavi $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ za poljubni izjavi A in B. **(3 točke)**

Iz izjave A sledi izjava B (ali: „Če A, potem B.“): $A \Rightarrow B$, če lahko iz resničnosti A sklepamo na resničnost B. Izjava $A \Rightarrow B$ se imenuje *implikacija*. Natančna definicija je dana s Tabelo 2.

Zapis $B \Leftarrow A$ pomeni isto kot $A \Rightarrow B$.

Primer: V mehaniki velja tale implikacija:

„Telo miruje“ $\Rightarrow$ “Vsota vseh na telo delujočih sil je nič.“

V implikaciji $A \Rightarrow B$ je A **predpostavka** (ali **premisa**, **hipoteza**, **antecedens**), B pa **posledica** (ali **zaključek**, **konsekvens**).

Rečemo tudi, da je A **zadosten pogoj** za B in B **potreben pogoj** za A.[1]

Kaj je ekvivalenca? Predstavite primer ekvivalence, ki je pravilna (resnična). (1 točka)

Ekvivalenca je enakovrednost izjav.

Izjavi A in B sta **ekvivalentni** (ali: **ekvivalenca** $A \Leftrightarrow B$ je resnična), če sta A in B v kontekstu vselej hkrati resnični ali hkrati lažni.

Primer: Če govorimo o neničelnih realnih številih (kontekst!), sta ekvivalentni izjavi:

„Produkt števil x in y je pozitiven.“ $\Longleftrightarrow$ „Števili x in y sta enako predznačeni.“[1]

1.3 Množice

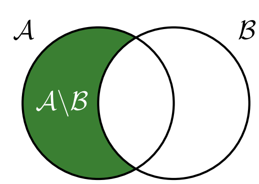
Kaj je prazna množica in kaj je univerzalna množica? (1 točka)

Prazna množica $\emptyset$ nima nobenega elementa, **osnovna množica** ali **univerzum** $\mathcal{U}$ pa ima sploh vse elemente, ki nas v neki teoriji zanimajo. Kaj je univerzum, je seveda stvar dogovora.[1]

Kaj je razlika dveh množic? Kako označimo razliko dveh množic in kako jo grafično predstavimo? (2 točki)

Razlika dveh množic[1] (Slika 1):

$$\mathcal{M} \backslash \mathcal{N} :- \{x | x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^C$$



Slika 1: Razlika.

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Longleftrightarrow \mathcal{A} \backslash \mathcal{B} = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{U}\backslash\mathcal{A} = \mathcal{A}^C$$

Kaj je komplement množice? (1 točka)

Komplement: $\mathcal{M}^C := \{x | x \notin \mathcal{M}\}$

Komplement vsebuje vse tiste elemente iz univerzuma $\mathcal{U}$,ki niso v $\mathcal{M}$ (Slika TODO). Pozor! O komplementu je torej mogoče govoriti le, če je domenjeno, kaj je $\mathcal{U}$.

Primer: V okviru realnih števil (univerzum!) je komplement množice števil $\mathbb{R}^+$ množica nepozitivnih števil: $(\mathbb{R}^+)^C = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$.[1]

Dokažite, da je $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})^C = \mathcal{A}^\mathcal{C} \cap \mathcal{B}^\mathcal{C}$ za poljubni množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.(2 točki)

Pokaži grafično z Vennovim diagramom in reci, da je očitno in trivialno. Ocenjevalca boš tako dodobra zmedel.

1.4 Množice

Kdaj je množica $\mathcal{A}$ podmnožica množice $\mathcal{B}$? (1 točka)

Inkluzija: $\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \Leftrightarrow$ "vsak element iz $\mathcal{M}$ je tudi v $\mathcal{N}$" $\iff \forall x \, (x \in \mathcal{M} \Rightarrow x \in \mathcal{N})$

Za vsako množico $\mathcal{M}$ velja $\emptyset \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{U}$. Če $\mathcal{M}$ ni podmnožica $\mathcal{N}$, pišemo $\mathcal{M} \not\subset \mathcal{N}$.

Družina podmnožic $\mathscr{P}\mathcal{M}$ množice $\mathcal{M}$ je **potenčna množica** od $\mathcal{M}$: $\mathscr{P}\mathcal{M} = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \subset \mathcal{M}\}$.

Primer: $\mathcal{M} = \{a, b, c\}$; $\mathscr{P}\mathcal{M} = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \mathcal{M}\right\}$.

Potenčno množico včasih označujemo s simbolom $2^\mathcal{M}$.[1]

Kdaj sta dve množici enaki? (1 točka)

Enakost množic: $\mathcal{M} = \mathcal{N} \iff$ „množici imata iste elemente“$\iff \forall x \, (x \in \mathcal{M} \iff x \in \mathcal{N})$[1]

Kaj je presek dveh množic? Moč množice $\mathcal{A}$ je n, moč množice $\mathcal{B}$ pa m. Ocenite, kolikšna je lahko moč množice $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. (2 točki)

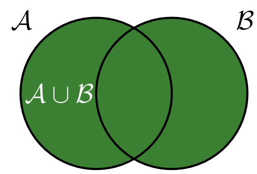
Presek: $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} := \{x | x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$

Presek vsebuje tiste elemente, ki so v obeh množicah hkrati (Slika TODO).[1]

Kaj je unija dveh množic? Moč množice $\mathcal{A}$ je n, moč množice $\mathcal{B}$ pa m. Ocenite, kolikšna je lahko moč množice $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. (2 točki)

Unija: $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} := \{x | x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$

Unija združuje vse elemente iz $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$ (Slika 2).[1]



Slika 2: Unija.

1.5 Naravna in cela števila

TODO: naša šola je ta listič izločila

1.6 Liha in soda števila

Definirajte soda in liha števila. **(1 točka)**

> Števila, ki so deljiva z 2, so **soda**, ostala pa **liha**.[1]

- Števila, ki imajo v dvojiškem številskem sistemu na koncu (najmanj pomembnem mestu) ničlo, so liha, ostala, to je tista, ki imajo na koncu enico, pa liha. Tu moramo negativna števila pisati klasično matematično.
- Vsota 1 in sodega števila je liho število.

Pokažite, da je vsota dveh lihih števil sodo število. **(1 točka)**

Ker velja, da je vsota dveh sodih števil sodo število, da je zmnožek sodega in celega števila sodo število in da je množenje distributivna operacija, lahko dokažemo takole:

$$2\,(2k+1) = 4k+2;\; k \in \mathbb{Z}$$

Pokažite, da je kvadrat lihega števila liho število. **(1 točka)**

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,\; k \in \mathbb{Z}$$

Pokažite, da je vsota dveh zaporednih lihih števil deljiva s 4. **(2 točki)**

$$2k \cancel{-1} + 2k \cancel{+1} = 4k$$

1.7 Praštevila

Definirajte praštevilo in sestavljeno število. Naštejte tri praštevila in tri sestavljena števila. **(2 točki)**

> Naravna števila, večja od 1, delimo na **praštevila**, to je tista, ki so deljiva le z 1 in s samim seboj, in **sestavljena števila**.[1]

- Tri praštevila: 2, 3, 5
- Tri sestavljena števila: 4, 6, 8

Kaj je razcep naravnega števila na prafaktorje? Ali je razcep na prafaktorje enoličen? (2 točki)

Vsako sestavljeno število lahko zapišemo kot produkt praštevil, **prafaktorjev** tega števila. Tak zapis je enoličen (če ne upoštevamo vrstnega reda faktorjev).[1]

Primer: $15228 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$

Dokažite, da je praštevil neskončno mnogo. (2 točki)

Dokažimo s protislovjem. Denimo, da je praštevil končno mnogo. Naj bo $n-1$ produkt vseh praštevil. Glede na zapisano v 1.7 je n lahko

- bodisi praštevilo, tedaj je n novo praštevilo, kar je v protislovju z zadano izjavo,
- bodisi sestavljeno število, tedaj ga deli vsaj neko praštevilo p. p ne more biti hkrati tudi prafaktor $n-1$, torej element predpostavljene končne množice praštevil, saj bi potem veljalo $p|1$, kar je nemogoče. To vodi v protislovje; tedaj p je novo praštevilo.

1.8 Deljivost

Kdaj je naravno število a večkratnik naravnega števila b? (1 točka)

Kadar velja izjava

$$\frac{b}{a} \in \mathbb{N}.$$

Definirajte relacijo deljivosti v množici $\mathbb{N}$. (1 točka)

Izjavo „a deli b“ oziroma „b je deljiv z a“ napišemo takole: $a|b$. Bolj natančno, $a|b \iff \exists c : b = ac$, kjer $\{a, b, c\} \subset \mathbb{Z}$ V smislu te definicije je zapis $0|0$ pravilen.[1]

Opišite vsaj tri lastnosti relacije deljivosti. (3 točke)

Relacija deljivost je refleksivna: $a|a$, antisimetrična: $a|b \wedge b|a \iff a = b$, tranzitivna: $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$.[1]

Dokažite, da je relacija deljivosti tranzitivna. (1 točka)

Če velja $a|b$, tedaj obstaja tak d, da je $b = ad$. Če velja tudi $b|c$, tedaj $\exists e : c = eb$. Zamenjamo b v slednji enačbi, dobimo $c = ead$, torej $a|c$. $\square$

1.9 Večkratniki in delitelji

Definirajte največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh naravnih števil. Razločite vsaj eno metodo za izračun najmanjšega skupnega večkratnika dveh naravnih števil. (2 točki)

$$\mathcal{D}_m = \{x|x \in \mathbb{N}; x|m\}$$

$$\mathcal{V}_m = \{x|k \in \mathbb{N}; x = km\}$$

$$D\left(m,n\right) = \max\left(\mathcal{D}_m \cap \mathcal{D}_n\right)$$

$$v\left(m,n\right) = \min\left(\mathcal{V}_m \cap \mathcal{V}_n\right)$$

Za izračun najmanjšega skupnega večkratnika dveh naravnih števil naredimo prafaktorski razcep za obe števili. Funkcija $y\left(p\right)$, kjer je p praštevilo, vrne večjo potenco izmed dveh razcepov, na katero je v prafaktorskem razcepu povzdignjeno praštevilo. Najmanjši skupni večkratnik je tedaj $\prod p^{y(p)}$ preko vseh praštevil. Tako dobljeni najmanjši skupni večkratnik je očitno deljiv z obema številoma, dokaza, da je res najmanjši, pa ne bom napisal.

Povejte zvezo med $m, n, v\left(m,n\right)$ in $D\left(m,n\right)$. (1 točka)

$$D\left(m,n\right) \leq m \leq n \leq v\left(m,n\right)$$

$$v\left(m,n\right) D\left(m,n\right) = mn$$

Kdaj sta si dve naravni števili tuji? (1 točka)

Kadar drži izjava $D\left(m,n\right) = 1$.

Na primeru razložite Evklidov algoritem. (2 točki)

Osnovni izrek o deljenju: $a = kb + r$. Drži $D\left(a,b\right) = D\left(k,r\right)$. Zamenjamo operanda, tako da je $a < b$. Števila v zanki čedalje manjšamo tako, da (malo po programersko) $a, b \coloneqq b, a \mod b$.

Primer: $D\left(882,666\right) = D\left(666,216\right) = D\left(216,18\right) = 18$. Pri zadnji operaciji $\mod$ smo namreč dobili rezultat 0, kar prekine izvajanje algoritma, rezultat pa je b.

2 Viri, literatura in dodatno branje

TODO: popravi vire v slovenščino (namesto and naj bo in)

Literatura

[1] Anton Cedilnik, Nada Razpet, and Marko Razpet. *Matematični Priročnik*. Didakta, 2012.

3 Zaključek

Za možne napake ne odgovarjam, bi bil pa vesel, če mi jih sporočite na anton@šijanec.eu. Srečno!